26/2/19

Ανισότητα C-S: Αν $a_1,\dots,a_k$, $b_1,\dots,b_k \in \mathbb{R}$

$$\sum_{i=1}^{k} |a_i b_i| \le \left(\sum_{i=1}^{k} |a_i|^2\right)^{1/2} \left(\sum_{i=1}^{k} |b_i|^2\right)^{1/2}$$

Συνέπεια: Η $\| \|_2$ ικανοποιεί την τριγωνική ανισότητα (... και άρα η $\| \|_2$ είναι νόρμα στον $\mathbb{R}^k$)

Απόδειξη: Αν $\vec{x}=(x_1,\dots,x_k)$, $\vec{y}=(y_1,\dots,y_k)\in\mathbb{R}^k$ θα δ.ο. $\|\vec{x}+\vec{y}\|_2 \le \|\vec{x}\|_2 + \|\vec{y}\|_2$

Έχουμε: $\|\vec{x}+\vec{y}\|_2^2 = \sum_{i=1}^{k} |x_i+y_i|^2 = \sum_{i=1}^{k} (x_i^2 + 2x_iy_i + y_i^2) \le$

$\le \sum_{i=1}^{k} |x_i|^2 + 2\sum_{i=1}^{k} |x_iy_i| + \sum_{i=1}^{k} |y_i|^2 \le \sum_{i=1}^{k} |x_i|^2 + 2\left(\sum_{i=1}^{k} |x_i|^2\right)^{1/2} \cdot$

$\cdot \left(\sum_{i=1}^{k} |y_i|^2\right)^{1/2} + \sum_{i=1}^{k} |y_i|^2 =$ ανισότητα Cauchy-Schwartz

$= \|\vec{x}\|_2^2 + 2\|\vec{x}\|_2 \|\vec{y}\|_2 + \|\vec{y}\|_2^2 = (\|\vec{x}\|_2 + \|\vec{y}\|_2)^2 \Rightarrow$

$\Rightarrow \|\vec{x}+\vec{y}\|_2 \le \|\vec{x}\|_2 + \|\vec{y}\|_2$

Η απόδειξη ότι η $\| \|_p$ είναι νόρμα στηρίζεται στην ανισότητα Minkowski: Αν $a_1,\dots,a_k$, $b_1,\dots,b_k\in\mathbb{R}$ και $p\ge 1$

$$\left(\sum_{i=1}^{k} |a_i+b_i|^p\right)^{1/p} \le \left(\sum_{i=1}^{k} |a_i|^p\right)^{1/p} + \left(\sum_{i=1}^{k} |b_i|^p\right)^{1/p}$$

Ανισότητες που συνδέουν τις $\| \|_\infty$ και $\| \|_p$ $p\ge 1$ στον $\mathbb{R}^k$

Για κάθε $\vec{x}=(x_1,\dots,x_k)\in\mathbb{R}^k$ ισχύει: $\|\vec{x}\|_\infty \le \|\vec{x}\|_p \le k^{1/p}\|\vec{x}\|_\infty$

Απόδειξη: Έστω $\vec{x}=(x_1,\dots,x_k)\in\mathbb{R}^k$ για κάθε $i=1,\dots,k$

$|x_i| \le \left(\sum_{j=1}^{k} |x_j|^p\right)^{1/p} = \|\vec{x}\|_p$ άρα: $\max\{|x_i| : i=1,\dots,k\} \le \|\vec{x}\|_p$

άρα: $\|\vec{x}\|_\infty \le \|\vec{x}\|_p$

$\longrightarrow$

Έστω $i_0 \in \{1,\dots,k\}$ ώστε: $\|\vec{x}\|_\infty = |x_{i_0}|$. Τότε για κάθε $i=1,\dots,n$ $|x_i| \le |\vec{x}|_\infty$ άρα:
$|x_i|^p \le \|\vec{x}\|_\infty^p$ Προσθέτοντας κατά μέλη αυτές τις k - ανισότητες έχουμε: $\sum_{i=1}^{k} |x_i|^p \le k \cdot \|\vec{x}\|_\infty^p \Rightarrow$

$$\Rightarrow \left(\sum_{i=1}^{k} |x_i|^p\right)^{1/p} \le k^{1/p} \cdot \|\vec{x}\|_\infty \Rightarrow \|\vec{x}\|_p \le k^{1/p} \|\vec{x}\|_\infty$$

→ Οι μετρικές που ορίζουν οι $\| \|_p$ $1 \le p \le \infty$ στον $\mathbb{R}^k$

Για $\vec{x}, \vec{y} \in \mathbb{R}^k$: $\rho_\infty(\vec{x},\vec{y}) = \|\vec{x}-\vec{y}\| = \max\{|x_i - y_i| \; i=1,\dots,n\}$
$\rho_p(\vec{x},\vec{y}) = \|\vec{x}-\vec{y}\|_p = \left(\sum_{i=1}^{} |x_i - y_i|^p\right)^{1/p}$

Για $p=2$ είναι η ευκλείδεια μετρική

Άσκηση: Έστω (X,ρ) μετρικός χώρος
i) $\forall a,b,\gamma \in X$ $|\rho(a,b) - \rho(a,\gamma)| \le \rho(b,\gamma)$
ii) $\forall a,b,\gamma \in X$ $|\rho(a,b) - \rho(\gamma,\delta)| \le \rho(a,\gamma) + \rho(b,\delta)$

Απόδειξη: $|x| \le \theta \Leftrightarrow -\theta \le x \le \theta$

i) Αρκεί να δ.ο. $-\rho(b,\gamma) \le \rho(a,b) - \rho(a,\gamma) \le \rho(b,\gamma)$
Από την τριγωνική ανισότητα για τη μετρική ρ έχουμε:

$$\rho(a,b) \overset{\text{τριγ.}}{\le} \rho(a,\gamma) + \rho(\gamma,b) \overset{\text{συμμ.}}{=} \rho(a,\gamma) + \rho(b,\gamma) \Rightarrow$$

$$\boxed{\rho(a,b) - \rho(a,\gamma) \le \rho(b,\gamma)} \quad (1)$$

Πάλι από την τριγωνική ανισότητα της μετρικής ρ έχουμε: $\rho(a,\gamma) \le \rho(a,b) + \rho(b,\gamma) \Rightarrow$

$$\Rightarrow \boxed{-\rho(b,\gamma) \le \rho(a,b) - \rho(a,\gamma)} \quad (2)$$

Από (1), (2) $\Rightarrow$ $|\rho(a,b) - \rho(a,\gamma)| \leq \rho(b,\gamma)$

ii) Από την τριγ. ανισότητα για την ρ έχουμε:
$\rho(a,b) \leq \rho(a,\gamma) + \rho(\gamma,b) \leq \rho(a,\gamma) + \rho(\gamma,\delta) + \rho(\delta,b)$
$\Rightarrow \boxed{\rho(a,b) - \rho(\gamma,\delta) \leq \rho(a,\gamma) + \rho(b,\delta)}$ (3)

Τριγ. ανισότητα: $\rho(\gamma,\delta) \leq \rho(\gamma,a) + \rho(a,\delta) \leq$
$\leq \rho(\gamma,a) + \rho(a,b) + \rho(b,\delta) = \rho(a,\gamma) + \rho(a,b) + \rho(b,\delta)$

$\Rightarrow \boxed{\rho(\gamma,\delta) - \rho(a,b) \leq \rho(a,\gamma) + \rho(b,\delta)}$ (4)

Από (3), (4) $\Rightarrow$ $|\rho(a,b) - \rho(\gamma,\delta)| \leq \rho(a,\gamma) + \rho(b,\delta)$

Άσκηση: Έστω (X,ρ) μετρικός χώρος. Ορίζουμε:
$d(x,y) = \min\{1, \rho(x,y)\}$ $\forall x,y \in X$. Να δ.ο. η d είναι μετρική στο X

Απόδειξη: i) $d(x,y) \geq 0$ (διότι $1>0$, $\rho(x,y) \geq 0$)
$d(x,y) = 0 \Leftrightarrow \min\{1, \rho(x,y)\} = 0 \Leftrightarrow \rho(x,y) = 0 \Leftrightarrow x = y$

ii) $d(y,x) = \min\{1, \rho(y,x)\} = \min\{1, \rho(x,y)\} = d(x,y)$

iii) Τριγωνική ανισότητα: Θα δ.ο. $d(x,z) \leq d(x,y) + d(y,z)$
Διακρίνουμε τις εξής περιπτώσεις
a) Αν $1 \leq \rho(x,y)$ ή $1 \leq \rho(y,z)$
a1) Αν $1 \leq \rho(x,y)$
$d(x,z) = \min\{1, \rho(x,z)\} \leq 1 = d(x,y) \leq d(y,z) + d(x,y)$
a2) Αν $1 \leq \rho(y,z)$
$d(x,z) = \min\{1, \rho(x,z)\} \leq 1 = d(y,z) \leq d(x,y) + d(y,z)$

b) $\rho(x,y) < 1$ και $\rho(y,z) < 1$

$\longrightarrow$

τότε: $d(x,y) = p(x,y)$ και $d(y,z) = p(y,z)$ και άρα:

$$d(x,z) = \min\{1, p(x,z)\} \leq p(x,z) \underset{\substack{\uparrow \\ \text{τρ. ανισότητα} \\ \text{για τη } p}}{\leq} p(x,y) + p(y,z) = d(x,y) + d(y,z)$$

Επομένως η d είναι μετρική στο X

<u>Άσκηση</u>: Έστω (X,p). Ορίζουμε $d(x,y) = \dfrac{p(x,y)}{1+p(x,y)}$

Να δ.ο. η d είναι μετρική στο X.

<u>Απόδειξη</u>: i) $d(x,y) = \dfrac{p(x,y)}{1+p(x,y)} \geq 0$

και $d(x,y) = 0 \Leftrightarrow \dfrac{p(x,y)}{1+p(x,y)} = 0 \Leftrightarrow p(x,y) = 0 \Leftrightarrow \underline{x=y}$

ii) $d(y,x) = \dfrac{p(y,x)}{1+p(y,x)} = \dfrac{p(x,y)}{1+p(x,y)} = d(x,y) \quad \forall x,y \in X$

iii) Θα δείξουμε την τριγωνική ανισότητα για την d δηλ. ότι $d(x,z) \leq d(x,y) + d(y,z) \quad \forall x,y,z \in X$

$$d(x,y) = \begin{cases} 0 & , x=y \\ \dfrac{1}{\frac{1}{p(x,y)}+1} & , x \neq y \end{cases}$$

(Εφόσον η p είναι μετρική): Αν $x=z$ ή $x=y$ ή $y=z$ η ανισότητα είναι προφανής

Εφόσον η ρ είναι μετρική υποθέτοντας $x \neq z \neq y \neq x$

$$\rho(x,z) \leq \rho(x,y) + \rho(y,z) \Rightarrow \frac{1}{\rho(x,z)} \geq \frac{1}{\rho(x,y)+\rho(y,z)} \Rightarrow$$

$$\Rightarrow \frac{1}{\rho(x,z)} + 1 \geq \frac{1}{\rho(x,y)+\rho(y,z)} + 1 \Rightarrow$$

$$\Rightarrow \frac{1}{\frac{1}{\rho(x,z)}+1} \leq \frac{1}{\frac{1}{\rho(x,y)+\rho(y,z)}+1} \Rightarrow$$

$$\Rightarrow d(x,z) \leq \frac{\rho(x,y)+\rho(y,z)}{1+\rho(x,y)+\rho(y,z)} = \frac{\rho(x,y)}{1+\rho(x,y)+\rho(y,z)} + \frac{\rho(y,z)}{1+\rho(x,y)+\rho(y,z)}$$

$$\leq \frac{\rho(x,y)}{1+\rho(x,y)} + \frac{\rho(y,z)}{1+\rho(y,z)} = d(x,y) + d(y,z)$$

Ανοικτές και κλειστές μπάλες σε μ.χ.

Ορισμός: Έστω (X,ρ) μετρικός χώρος: $x_0 \in X$, $\varepsilon > 0$. Η ανοικτή μπάλα με κέντρο x_0 και ακτίνα ε ορίζεται να είναι το σύνολο $B_\rho(x_0,\varepsilon) = \{x \in X : \rho(x,x_0) < \varepsilon\}$ Η

κλειστή μπάλα με κέντρο x_0 και ακτίνα ε ορίζεται να είναι το σύνολο $\hat{B}_\rho(x_0,\varepsilon) = \{x \in X : \rho(x,x_0) \leq \varepsilon\}$

Παραδείγματα: (i) Στο $\mathbb{R}$ με τη συνήθη μετρική ρ $(\rho(x,y) = |x-y|)$ αν $x_0 \in \mathbb{R}$, $\varepsilon > 0$ $B_\rho(x_0,\varepsilon)$?

$B_\rho(x_0,\varepsilon) = \{x \in X : \rho(x,x_0) < \varepsilon\} = \{x \in X : |x-x_0| < \varepsilon\} =$

$= |x-x_0| < \varepsilon \Rightarrow -\varepsilon < x - x_0 < \varepsilon \Rightarrow x_0-\varepsilon < x < x_0+\varepsilon$

$B_\rho(x_0,\varepsilon) = (x_0-\varepsilon, x_0+\varepsilon)$ (ανοικτό διάστημα)

$\hat{B}_\rho(x_0,\varepsilon) = [x_0-\varepsilon, x_0+\varepsilon]$

$\longrightarrow$

ii) Αν $X \neq \emptyset$ και ρ η διακριτή μετρική στο X

$\left(\rho(x,y) = \begin{cases} 1, & x \neq y \\ 0, & x = y \end{cases} \right)$

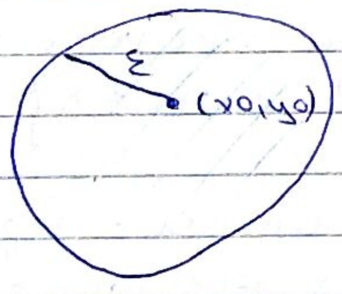
Αν $x_0 \in X$, $\varepsilon > 0$ $\quad B_\rho(x_0,\varepsilon) = \begin{cases} X, & \text{αν } \varepsilon > 1 \\ \{x_0\}, & \text{αν } 0 < \varepsilon \leq 1 \end{cases}$

$\hat{B}_\rho(x_0,\varepsilon) = \begin{cases} X, & \text{αν } \varepsilon \geq 1 \\ \{x_0\}, & \text{αν } 0 < \varepsilon < 1 \end{cases}$

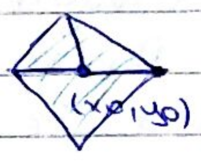
iii) Στον $\mathbb{R}^2$ ως προς τις μετρικές $\rho_\infty, \rho_1, \rho_2$ Αν $x_0, y_0 \in \mathbb{R}^2$, $\varepsilon > 0$

Ευκλείδεια

$B_{\rho_2}((x_0,y_0),\varepsilon) = \left\{ (x,y) \in \mathbb{R}^2 : \sqrt{(x-x_0)^2 + (y-y_0)^2} < \varepsilon \right\}$



$B_{\rho_1}((x_0,y_0),\varepsilon) = \left\{ (x,y) \in \mathbb{R}^2 : |x-x_0| + |y-y_0| < \varepsilon \right\}$



$B_{\rho_\infty}((x_0,y_0),\varepsilon) = \left\{ (x,y) \in \mathbb{R}^2 : \max\{|x-x_0|, |y-y_0|\} < \varepsilon \right\}$